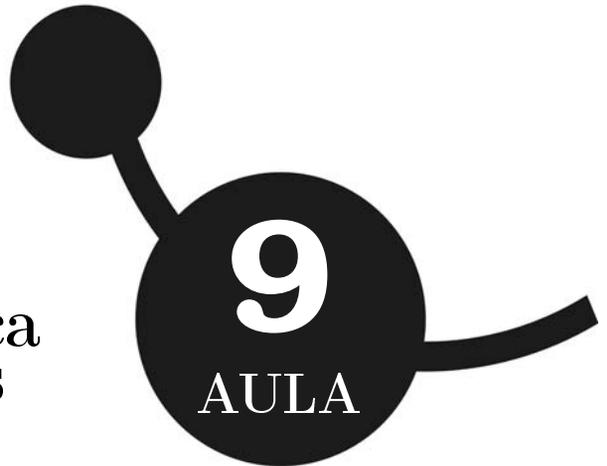
# Mecânica estatística quântica II: bósons

**META**

Construir o formalismo da mecânica estatística quântica para bósons.

**OBJETIVOS**

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Entender a influência das propriedades quânticas na construção do formalismo da mecânica estatística.

Obter a distribuição de Bose-Einstein.

Abordar a radiação do corpo negro e o calor específico de sólidos.

Resolver problemas envolvendo estes conceitos.

**PRÉ-REQUISITOS**

Aulas anteriores e cálculo diferencial e integral.

## 9.1 Introdução

Caro aluno, como foi visto na aula anterior, ao levarmos em conta as propriedades quânticas das partículas, estabelecemos regras de contagem que diferem do caso clássico, dando forma a uma estatística distinta da de Maxwell-Boltzmann. Vimos que ao levar em conta o princípio de exclusão de Pauli (PEP) para férmions, obtemos a distribuição de Fermi-Dirac. No entanto, como tratar os bósons estatisticamente? Estes são partículas quânticas que não respeitam o PEP, pois a função de onda de bósons é simétrica com relação a troca de partículas. No entanto, assim como os férmions, bóson são partículas indistinguíveis por consequencia do princípio da incerteza de Heisenberg, que é uma das maiores bases da mecânica quântica.

*Bósons são partículas quânticas que possuem número quântico de spin inteiro ($s = 1, 2, 3, \ldots$) como, por exemplo, o fóton ($s = 1$). Estas partículas possuem função de onda simétrica e não satisfazem o princípio de exclusão de Pauli [1].

Nesta aula, iremos reformular a mecânica estatística com base nas propriedades quânticas dos bósons.

## 9.2 Distribuição de Bose-Einstein

Apesar dos bósons não respeitarem o PEP, estes devem satisfazer um princípio mais fundamental ainda: a indistinguibilidade. Com base nesta característica, vamos encontrar a distribuição que rege os sistemas bosônicos.

### 9.2.1 Contando microestados

Considere, por simplicidade, um sistema com $N$ bósons não interagentes e distribuídos num espetro de energia $\epsilon \in \{\epsilon_j\}_{j=1}^{L}$. Cada valor de energia $\epsilon_j$ possui $n_j$ bósons em $g_j$ níveis, ou seja, estados com degenerescência $g_j$. Neste caso, a contagem de microestados

Figura 9.1: Uma possível arrumação de $n_j = 16$ bósons (bolas escuras) em $g_j = 9$ níveis, os quais estão esquematicamente separados na figura por $g_j - 1$ divisórias (linhas verticais). (Figura adaptada da ref. [1].)

é equivalente à contar o número de maneiras em que $n_j$ bolinhas indistinguíveis podem ser distribuídas em $g_j$ caixinhas. Esquematicamente, isto é equivalente a colocar as $n_j$ bolinhas numa fileira e separá-las com $g_j - 1$ divisórias, como mostra a fig. 9.1 , onde vemos um caso particular de $n_j = 16$ bolinhas e $g_j = 9$ caixinhas. Da esquerda para direita, vemos três bolinhas na primeira caixinha, uma bolinha na segunda caixinha, etc. Sendo assim, o número de maneiras distinguíveis que podemos distribuir as bolinhas nas caixas é igual ao número de permutações possíveis de $n_j + g_j - 1$ elementos, sendo $n_j$ bolinhas e $g_j - 1$ divisórias. Este número de permutações corresponde a $(n_j + g_j - 1)!$. No entanto, a permutação do número de bolinhas ($n_j!$ possibilidades) e do número de divisórias [$(g_j - 1)!$ possibilidades] não altera o microestado físico. Portanto, concluímos que há

$$\frac{(n_j + g_j - 1)!}{n_j!(g_j - 1)!}$$

microestados para a energia $\epsilon_j$. Sendo assim, obtemos o número total de microestados

$$\mathcal{W}(n_1, \ldots, n_L) = \prod_{j=1}^{L} \frac{(n_j + g_j - 1)!}{n_j!(g_j - 1)!} \tag{9.1}$$

### 9.2.2 Maximizando o número de microestados

Seguindo a prescrição da sec. 5.4.2 , fazemos a maximização de $\mathcal{W}$ e obtemos

$$n_j = \frac{g_j}{\exp(\alpha + \beta\epsilon_j) - 1}, \tag{9.2}$$

onde continuamos com

$$\beta = \frac{1}{k_B T}. \tag{9.3}$$

A probabilidade de um bóson ter energia $\epsilon_j$, é obtida fazendo $P_j = n_j/N$ [eq. (5.7)] e, sendo assim, temos

$$P_j = \frac{g_j}{N}\frac{1}{\exp(\alpha + \epsilon_j/k_B T) - 1} \tag{9.4}$$

A constante $\alpha$ é encontrada com a condição de normalização da probabilidade, $\sum_{j=1}^{L} P_j = 1$. Note que, como os bósons não seguem o PEP, não faz sentido definirmos a constante $\alpha$ em termos da energia de Fermi. No entanto, como a probabilidade deve sempre ser positiva, entre 0 e 1, a constante $\alpha$ deve ser não negativa, ou seja,

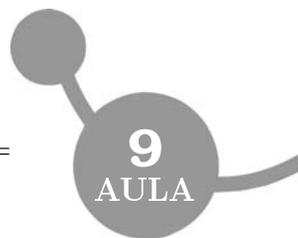
$$\alpha \geq 0. \tag{9.5}$$

## 9.3 Radiação do corpo negro: gás de fótons

O fóton é um bóson, que corresponde à menor divisão de uma onda eletromagnética. Pela teoria da relatividade restrita, a energia de uma partícula é [1]

$$\epsilon = mc^2 = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2},$$

onde $c$ é a velocidade da luz e

$$m_0 = m\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

é a massa de repouso da partícula. No entanto, para o fóton $m_0 = 0$. Sendo assim, a energia do fóton é

$$\epsilon = cp.$$

Em mecânica quântica, podemos usar a definição de operador diferencial do momento [2],

$$p = -i\hbar\frac{d}{dx},$$

para resolver a equação de Schrödinger de um fóton em uma caixa cúbica de aresta $a$ e, com isso, obter

$$\epsilon = \frac{ch}{2a}k, \tag{9.6}$$

onde $k = \sqrt{j_1^2 + j_2^2 + j_3^2}$ e $j_1, j_2, j_3 \in \mathbb{N}$. Podemos considerar que a caixa é muito grande, ou seja, $a \gg \lambda$, onde $\lambda$ é o comprimento de onda do fóton. Sendo assim, como o espaçamento de níveis de energia é da ordem de $ch/a$ [eq. (9.6)], podemos tomar o limite do contínuo e obter a densidade de níveis de maneira análoga ao que fizemos na sec. 8.3*

$$g(\epsilon) = 2\frac{1}{8}\int d^3\vec{k}\delta\left(\epsilon - \frac{ch}{2a}k\right). \tag{9.7}$$

*O fator multiplicativo 2 visto na sec. 8.3 , por consequência do spin do elétron, continua sendo válido para fótons, pois estes possuem duas direções de polarização independentes (vertical ou horizontal), visto que as ondas eletromagnéticas são transversais.

Resolvendo esta integral, obtemos

$$g(\epsilon) = \frac{8\pi V}{c^3h^3}\epsilon^2. \tag{9.8}$$

No limite do contínuo, podemos reescrever a eq. (9.4) da seguinte forma

$$\rho(\epsilon) = \frac{1}{N}\frac{g(\epsilon)}{\exp(\alpha + \epsilon/k_BT) - 1}.$$

Agora, podemos considerar que a caixa cúbica que confina os fótons em nosso problema é uma cavidade que absorve e reemite

fótons até alcançar o equilíbrio, quando os números de fótons absorvidos e reemitidos são iguais. Este é justamente o problema da radiação do corpo negro. Como neste caso o número de fótons não é constante, temos $\sum_j dn_j \neq 0$, implicando em $\alpha = 0$ (ver ativ. 9.1). Logo,

$$\begin{aligned}\rho(\epsilon) &= \frac{1}{N}\frac{g(\epsilon)}{\exp(\epsilon/k_B T) - 1} \\ &= \frac{8\pi V}{Nc^3h^3}\frac{\epsilon^2}{\exp(\epsilon/k_B T) - 1}. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Quanticamente, podemos escrever a energia do fóton da seguinte forma

$$\epsilon = h\nu,$$

onde $\nu$ é a frequência do fóton. Sendo assim, é conveniente calcular a distribuição de frequências da seguinte forma

$$\vartheta(\nu)d\nu = \rho(\epsilon)d\epsilon = \rho(h\nu)hd\nu.$$

Logo, concluímos que

$$\vartheta(\nu) = \frac{8\pi V}{Nc^3}\frac{\nu^2}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}. \tag{9.10}$$

Aqui, $N$ pode ser calculado através da normalização de densidade de probabilidade

$$\int_0^\infty \vartheta(\nu)d\nu = 1.$$

Também podemos calcular a densidade de energia por volume em função da frequência, fazendo

$$\mathcal{E}(\nu) = N\frac{h\nu}{V}\vartheta(\nu).$$

Sendo assim, obtemos

$$\mathcal{E}(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}, \tag{9.11}$$

conhecida como lei de radiação de Planck, a qual foi sugerida por Planck para o problema da radiação do corpo negro [1].

**Exemplo 9.3.1.** Discuta as transições atômicas espontâneas e induzidas por radiação num sistema de dois níveis. (Exemplo adaptado da ref. [1].)

Solução: Tomamos como base a fig. 9.2 onde temos$N_1(N_2)$ átomos com energia $E_1(E_2)$ e $E_2 > E_1$, com $E_2 - E_1 = h\nu$. Os átomos que estão no nível $E_2$ podem passar espontaneamente para o nível $E_1$, com probabilidade por unidade de tempo $A_{21}$. Considere que há radiação com frequência $\nu$ e densidade de energia $\mathcal{E}(\nu)$, interagindo com os átomos nos dois níveis de energia induzindo transições por absorção ou por emissão. É razoável supor que a probabilidade transição induzida por radiação é proporcional a $\mathcal{E}(\nu)$. Sendo assim, podemos dizer que a probabilidade por unidade de tempo de transição induzida por radiação é $B_{21}\mathcal{E}(\nu)$, do nível $E_2$ para o $E_1$, e $B_{12}\mathcal{E}(\nu)$, do nível $E_1$ para o $E_2$. Assim, considerando a absorção e emissão de radiação dos átomos no nível $E_2$, podemos estimar a variação de átomos neste nível por tempo da seguinte forma:

$$\frac{dN_2}{dt} = \underbrace{B_{12}\mathcal{E}(\nu)N_1}_{\text{absorção}} - \underbrace{[A_{21} + B_{21}\mathcal{E}(\nu)]N_2}_{\text{emissão}}.$$

Quando o equilíbrio equilíbrio entre os átomos e a radiação é estabelecido, devemos ter $dN_2/dt = 0$, ou seja,

$$B_{12}\mathcal{E}(\nu)N_1 = A_{21} + B_{21}\mathcal{E}(\nu)N_2.$$

$N_2$ átomos

$E_2$

$A_{21} + B_{21}\mathcal{E}(\nu)$ $B_{12}\mathcal{E}(\nu)$

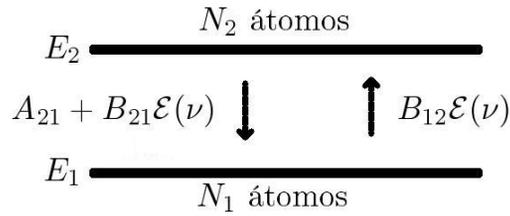
$E_1$

$N_1$ átomos

Figura 9.2: Transições espontâneas e induzidas. (Figura adaptada da ref. [1].)

Se os átomos estão em equilíbrio térmico e seguem a estatística de Maxwell-Boltzmann, temos

$$N_1/N_2 = \exp\left(\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right) = \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right).$$

Logo,

$$B_{12}\mathcal{E}(\nu)\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) = A_{21} + B_{21}\mathcal{E}(\nu)$$

e, consequentemente,

$$\mathcal{E}(\nu) = \frac{A_{21}/B_{12}}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - B_{21}/B_{12}}.$$

Comparando esta equação com a eq. (9.11), obtemos

$$\frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{8\pi h}{c^3} \quad \text{e} \quad \frac{B_{21}}{B_{12}} = 1.$$

Com isso, podemos ver que

$$\frac{\text{prob. de emissão espontânea}}{\text{prob. de emissão induzida}} \equiv \frac{A_{21}}{B_{21}\mathcal{E}(\nu)} = \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1.$$

Perceba que para $h\nu \gg k_B T$ a emissão espontânea é muito maior que a induzida, a qual pode ser desprezada. No entanto, para $h\nu \ll k_B T$, a probabilidade de emissão induzida é muito maior que a espontânea.

## 9.4 Calor específico de sólidos: gás de fônons

As vibrações coletivas de átomos em sólidos são responsáveis pela variação de energia do sistema através da variação da temperatura. Sendo assim, iremos considerar estes efeitos vibracionais para calcular o calor específico dos sólidos.

Estas vibrações coletivas formam ondas estacionárias, que podem ser interpretadas como ondas elásticas. As frequências destas ondas estacionárias dependem da forma e do tamanho do sólido. Existe um bóson para estas ondas equivalente ao fóton para a onda eletromagnética, o qual é chamado de fônon. Este nome é justificado pela natureza destas ondas elásticas, já que se propagam com a velocidade do som. Podemos, portanto, modelar a vibração da rede cristalina de um sólido através de gás de fônons, de maneira análoga ao que fizemos na seção anterior, onde modelamos o problema da radiação do corpo negro como uma gás de fótons.

As ondas elásticas em um sólido possuem duas classes, longitudinais e transversais, as quais se propagam com, respectivamente, velocidades $v_l$ e $v_t$. No entanto, as ondas longitudinais possuem apenas um único grau de liberdade, enquanto as transversais possuem dois. Sendo assim, podemos manter a densidade de níveis da eq. (9.8), trocando $c$ por $v_l$ ou $v_t$ e dividindo por 2 para as ondas longitudinais. Logo,

$$g_t(\epsilon) = \frac{8\pi V}{v_t^3 h^3}\epsilon^2.$$

$$g_l(\epsilon) = \frac{4\pi V}{v_l^3 h^3}\epsilon^2.$$

Sendo assim, a densidade total de níveis é

$$g(\epsilon) = g_t(\epsilon) + g_l(\epsilon) = \frac{4\pi V}{h^3}\left(\frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_t^3}\right)\epsilon^2.$$

Em um meio contínuo não há limite para o número total de modos de vibração, ou seja, o número de níveis. No entanto, em um sólido com $N$ átomos, todo modo vibracional é descrito por $3N$ coordenadas espaciais dos átomos, sendo este o número total de modos independentes de vibração. Com isso, devemos impor o limite superior de energia, $h\nu_0$, o qual define a frequência de corte $\nu_0$. Com isso, temos

$$3N = \int_0^{h\nu_0} g(\epsilon)d\epsilon = \frac{4\pi V}{h^3}\left(\frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_t^3}\right)\int_0^{h\nu_0} \epsilon^2 d\epsilon,$$

e, portanto, obtemos uma relação que determina a frequência de corte

$$\frac{9N}{\nu_0^3} = 4\pi V\left(\frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_t^3}\right).$$

Logo, podemos escrever a densidade de níveis da seguinte forma

$$g(\epsilon) = \frac{9N}{h^3\nu_0^3}\epsilon^2.$$

Com isso, podemos escrever a distribuição de energia do fônon

$$\begin{aligned}\rho(\epsilon) &= \frac{1}{M}\frac{g(\epsilon)}{\exp(\epsilon/k_BT) - 1} \\ &= \frac{9N}{Mh^3\nu_0^3}\frac{\epsilon^2}{\exp(\epsilon/k_BT) - 1},\end{aligned} \tag{9.12}$$

onde $M$ é o número de fônons em equilíbrio térmico com o sólido.

Análogo ao fóton, podemos escrever a energia do fônon como $\epsilon = h\nu$ onde $\nu$ é a sua frequência. Agora, podemos calcular a distribuição de frequências da seguinte forma

$$\vartheta(\nu)d\nu = \rho(\epsilon)d\epsilon = \rho(h\nu)hd\nu,$$

onde obtemos

$$\vartheta(\nu) = \frac{9N}{M\nu_0^3}\frac{\nu^2}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_BT}\right) - 1}. \tag{9.13}$$

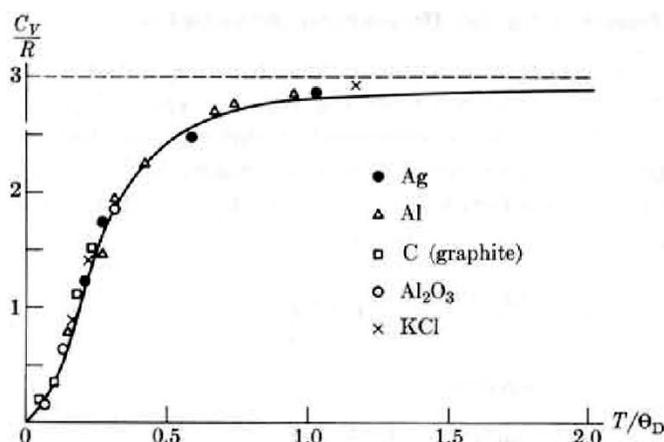



Figura 9.3: Calor específico de uma rede cristalina em função da temperatura. (Figura retirada da ref. [1].)

Note que, ao impor a normalização desta densidade de probabilidade, é possível obter o número de fônons, $M$, o qual dependerá da temperatura, do número de átomos e da frequência de corte.

Agora podemos calcular a energia interna vibracional do sólido fazendo*

$$U \equiv M\langle\epsilon\rangle = Mh\langle\nu\rangle = Mh\int_0^{\nu_0} \nu\vartheta(\nu)d\nu,$$

implicando em

$$U = \frac{9Nh}{\nu_0^3}\int_0^{\nu_0} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_BT}\right) - 1}d\nu. \tag{9.14}$$

Usando a eq. (7.1), podemos obter o calor específico molar a volume constante do sólido

$$c_V = 9R\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3\int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^4\exp(x)}{[\exp(x) - 1]^2}dx, \tag{9.15}$$

onde

$$\Theta_D \equiv \frac{h\nu_0}{k_B}$$

*Poderíamos adicionar a energia de ponto zero associada a cada modo de vibração, mas esta não interfere na obtenção do calor específico, pois não depende de temperatura.

é a temperatura característica de Debye. Como $\nu_0$ depende do material, a temperatura de Debye também é característica específica deste.

Resolvendo numericamente esta integral, alcança-se o resultado apresentado na fig. 9.3 , o qual concorda muito bem para vários materiais. O regime assintótico de $c_V$ em altas temperaturas é constante e igual a $3R$. Este comportamento é conhecido como a lei de Dulong-Petit.

## 9.5 Conclusão

Vimos que ao considerarmos as propriedades quânticas de indistinguibilidade para os bósons, obtemos a distribuição de Bose-Einstein, a qual é fundamental para estudarmos estatisticamente sistemas bosônicos. Como exemplo, abordamos o gás de bósons modelando a radiação do corpo negro e o calor específico de sólidos.

## 9.6 Resumo

A distribuição de Bose-Einstein para bósons é dada por

$$P_j = \frac{g_j}{N} \frac{1}{\exp(\alpha + \epsilon_j / k_B T) - 1}$$

Para o problema da radiação do corpo negro, modelado por um gás de fótons, a distribuição de frequência para os fótons é

$$\vartheta(\nu) = \frac{8\pi V}{Nc^3} \frac{\nu^2}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}.$$

O número de fótons em equilíbrio com as paredes da cavidade, $N$, pode ser calculado através da normalização de densidade de

probabilidade

$$\int_0^\infty \vartheta(\nu) d\nu = 1.$$

O calor específico em um sólido é ocasionado basicamente pela vibração da sua rede cristalina. O fônon é o bóson associado a esta vibração. Modelando este problema como um gás de fônon, obtemos a distribuição de frequência dos fônons

$$\vartheta(\nu) = \frac{9N}{M\nu_0^3} \frac{\nu^2}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}.$$

Note que, ao impor a normalização desta densidade de probabilidade, é possível obter o número de fônons, $M$, o qual dependerá da temperatura, do número de átomos e da frequência de corte. Com este resultado, obtemos o calor específico molar a volume constante do sólido

$$c_V = 9R \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^4 \exp(x)}{[\exp(x) - 1]^2} dx,$$

onde

$$\Theta_D \equiv \frac{h\nu_0}{k_B}$$

é a temperatura característica de Debye.

## 9.7 Atividades

**ATIV. 9.1.** (a) Mostre que ao maximizar o número de microestados da eq. (9.1) se obtém a eq. (9.2). (b) Usando os passos da resolução do item anterior, justifique o motivo pelo qual $\alpha = 0$ se o número de bósons não se conserva.

**Comentário:** Esta maximização pode ser feita com o uso de multiplicadores de Lagrange. Uma consulta na ref. [1] poderá auxiliar na resolução desta atividade.

**ATIV. 9.2.** Calcule a integral da eq. (9.7) até obter a densidade de níveis da eq. (9.8) para o gás ideal de fótons.

**Comentário:** Esta integral pode ser resolvida como feito na sec. 5.5. Lembre-se que o volume de um cubo é a sua aresta ao cubo.

**ATIV. 9.3.** Considerando o problema da radiação do corpo negro, (a) mostre que o número de fótons dentro da cavidade em equilíbrio com os átomos das suas paredes é

$$N = \frac{16\pi V}{h^3 c^3}\zeta(3)(k_B T)^3,$$

onde

$$\zeta(x) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} j^{-x},$$

é a função Zeta de Riemann. (b) Calcule a densidade de fótons na cavidade a 300 K.

Dados: $\zeta(3) \approx 1{,}202056903$.

**Comentário:** Considere a normalização da densidade de probabilidade da eq. (9.10). A resolução da integral pode ser simplificada se multiplicarmos o numerador e o denominador do integrando por $\exp(-h\nu/k_B T)$. Em seguida identifique o fator deste integrando que corresponde à soma de uma P.G.

infinita e convergente. Com isso, é possível transformar a integral em uma soma de infinitas integrais, as quais podem ser facilmente resolvidas com técnicas de derivação paramétrica que você já está habituado.

**ATIV. 9.4.** Para o problema da radiação do corpo negro, (a) mostre que o $n$-ésimo momento da frequência é

$$\langle \nu^n \rangle = \frac{(n+2)!}{2h^n}\frac{\zeta(n+3)}{\zeta(3)}(k_B T)^n.$$

(b) Com este resultado, mostre que a energia média (energia interna) por fóton e sua variância são

$$\langle \epsilon \rangle = 3\frac{\zeta(4)}{\zeta(3)}k_B T \approx 2{,}7 k_B T,$$

$$\sigma_\epsilon \equiv \sqrt{\mathrm{var}(\epsilon)} = \sqrt{12\frac{\zeta(5)}{\zeta(3)} - 9\left[\frac{\zeta(4)}{\zeta(3)}\right]^2} k_B T \approx 1{,}75 k_B T$$

(c) Interprete estatisticamente o resultado do item anterior.

Dados: $\zeta(3) \approx 1{,}202056903$; $\zeta(4) = \pi^4/90$; $\zeta(5) \approx 1{,}036927755$.

**Comentário:** Lembre-se da definição de momentos na estatística abordado na sec. 4.4 . Recomenda-se fazer a atividade anterior antes desta.

**ATIV. 9.5.** Estime a razão entre as probabilidades de emissão espontânea e induzida a 300 K para (a) a região de micro-ondas, $\nu \sim 10^{23}$ Hz, e para (b) a região ótica, $\nu \sim 10^{15}$ Hz. (Atividade adaptada da ref. [1].)

**Comentário:** Use o resultado do exemplo 9.3.1 .

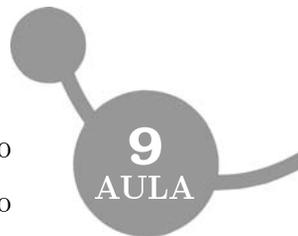
**ATIV. 9.6.** Com base no exemplo 9.3.1 , justifique o fato de que as radiações emitidas de forma induzida são coerentes e de forma espontânea são incoerentes.

**Comentário:** Uma consulta na ref. [1] é muito recomendada para a resolução desta atividade.

**ATIV. 9.7.** (a) Demonstre a eq. (9.15) partindo da eq. (9.14). (b) Com o resultado do item anterior mostre que $c_V = 3R$ para altas temperaturas ($T \gg \Theta_D$), o que corresponde à lei de Dulong-Petit. (c) Justifique o resultado do item anterior com base no princípio de equipartição da energia. (d) Mostre que em baixas temperaturas ($T \ll \Theta_D$), o calor específico segue a forma

$$c_V = \frac{12}{5} R\pi^4 \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 .$$

(e) Com base no resultado do item anterior, determine (quantitativamente) uma maneira de se estimar experimentalmente a temperatura de Debye para um sólido.

**Comentário:** Uma consulta na ref. [1] poderá auxiliar na resolução dos itens (a) e (c) desta atividade. No item (b), como a temperatura é alta, é necessário aproximar o integrando da eq. (9.15) para pequenos valores de $x$ e só em seguida fazer a integração. Note que, no item (d), como a temperatura é baixa, é possível tomar o limite superior da integral

da eq. (9.15) como infinito, resultando numa integral muito semelhante às resolvidas nas atividades 9.3 e 9.4. Um esboço de pontos experimentais de $c_V$ em função de $T^3$ para baixas temperaturas poderá auxiliar a resolução do item (e).

**ATIV. 9.8.** Discuta a relevância do calor específico de um sólido provocado pela movimentação dos elétrons comparado com a contribuição da vibração dos átomos da rede cristalina.

**Comentário:** Uma consulta na ref. [1] é muito recomendada para a resolução desta atividade.

## 9.8 Próxima aula

Na próxima aula, abordaremos o gás ideal quântico e compararemos as três estatísticas apresentadas até aqui: Maxwell-Boltzmann, Fermi-Dirac e Bose-Einstein.

## Referências

[1] ALONSO, M; FINN, E. J. *Fisica. Volumen III*: Fundamentos Cuanticos y Estadisticos. Edicion Revisada y Aumentada. Wilmigton: Addison-Wesley Iberoamericana, 1986.

[2] GASIOROWICZ, S. *Quantum Physics*. 3.ed. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 2003.